MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 4

1. (i) Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ ortogonal de det. 1. (i) Mostrar que T_A es una rotación de $\mathbf{R}^2$, alrededor del origen.(ii) Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ ortogonal de det. 1. Probar que 1 es un autovalor de A, y que T_A es una rotación de $\mathbf{R}^3$ alrededor de $\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un autovector perteneciente a 1. (Ayuda. Considerar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ que consta de $\vec{v}$-debidamente normalizado- y dos vectores mas en el plano $\{\vec{v}\}^{\perp}$). (iii) Probar que si $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ es ortogonal, entonces T_A es o bien una rotación, o bien una reflexión, o una composición de una rotación y una reflexión. ¿Como se distingue entre los 3 casos? (Ver Prob. 2 para la definición de una reflexión.)

2. Sea A, B matrices autoadjuntas. Probar que AB es autoadjunta sii $AB = BA$.

3. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ y suponer que existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t AQ$ es diagonal. Probar que A es simétrica.

4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ tal que $\bar{A}^t = -A$ (A se llama *antihermitiana* por analogía con antisimétrica). Probar que los autovalores de A son puramente imaginarios, es decir de la form ai, $a \in \mathbf{R}$.

5. Hallar una matriz unitaria que diagonalisa $\begin{pmatrix} 7 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$.

6. Hallar una matriz ortogonal que diagonalisa
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
Para ahorrar tiempo, notar que $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$.

7. Sea V un espacio vectorial de dim. finita con producto interno, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Sea $\mathcal{B}$ una base de V, y sea $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Sea $T^* = T_{A^*}$ donde $A^* = A^t$ (caso V real) o $\bar{A}^t$ (caso V complejo). Probar que $< T(\vec{v}), \vec{w} >=< \vec{v}, T^*(\vec{w}) > \forall\ \vec{v}, \vec{w} \in V$. (Esta es una versión simplificada del prob. 4.5.16 del texto. Hay errores de imprenta en el texto: las '*' estan mal colocadas.)

8. Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : V \to V$ (V un espacio con producto interno) tal que $T \neq 0$ pero $< T(\vec{v}), \vec{v} >= 0 \forall\ \vec{v} \in V$. (Contrario a lo que se afirmó en el problema 9 del Prob.1).